Spinorielle Feldtheorien und Noether-Theorem in der gekrümmten Raum-Zeit

Von Ernst Schmutzer

Theoretisch-Physikalisches Institut der Universität Jena

(Z. Naturforschg. **19 a**, 1027—1031 [1964]; eingegangen am 24. April 1964)

On the basis of a curved space-time with Riemannean geometry the conception of spinors is analyzed. It is shown that a consequent treatment of spinors as invariants with respect to coordinate transformations (Sommerfeld's first point of view) gives the well known energy-momentum-tensor and the correct spin integral. For this purpose it is necessary to develop Noether's theorem in such a way that not the metric tensor g_{mn} but the metric spintensor is the fundamental metrical quantity. This fact is the cause that the Belinfante tensor expression cannot be applied. A new tensor expression for spinor fields is derived. In this connection Dirac's theory and Heisenberg's theory are investigated.

Die vorliegende Arbeit basiert im wesentlichen auf der Symbolik unserer früheren Arbeiten [1] (kleine lateinische Indizes mögen von 1 bis 4 laufen). Inhaltlich stellt sie eine Weiterführung dar.

Sommerfeld [2] stellt bei der Untersuchung der Dirac-Gleichung bezüglich Lorentz-Transformationen fest, daß es grundsätzlich zwei Standpunkte geben könne, nämlich erstens die „Spinoren" als Invarianten aufzufassen und die γ_m als Tensoren zu transformieren und zweitens die γ_m als numerisch konstant anzusehen und die Spinoren zu transformieren. Er bemerkt dazu, daß der erste Weg explizit Relativgeschwindigkeiten in die Feldgleichungen bringen würde, weshalb dem zweiten Weg der Vorzug zu geben sei, der in der Tat auch historisch beschritten wurde und zur Entwicklung des eigentlichen Spinorkalküls geführt hat. Gruppentheoretisch wurde dieser Weg insofern als natürlich ausgewiesen, als die Lorentz-Gruppe Tensor- und Spinordarstellungen besitzt. Beim Übergang zu krummlinigen Koordinaten ist man zunächst versucht, diesen Weg zu verallgemeinern, im Sinne des allgemeinen physikalischen Verallgemeinerungsbestrebens, das das Vorhergehende als Spezialfall des Folgenden sieht. Nun ist seit langem bekannt [3, 4], daß die allgemeinen Koordinatentransformationen nur tensorielle Darstellungen besitzen. Aus diesem Grunde gibt es keinen derartigen Verallgemeinerungsweg, sondern man hat die Spinoren bei Koordinatentransformationen wie Invarianten zu behandeln, d. h. man hat an den von der Entwicklung nicht eingeschlagenen ersten Weg anzuknüpfen. Obwohl aber transformationstechnisch bei Koordinatentransformationen die Spinoren wie Invarianten zu behandeln sind, unterscheiden sie sich verschiebungstechnisch grundsätzlich von Invarianten. Für sie gilt nämlich

$$\chi^A{}_{;m} = \chi^A{}_{,m} + \left\{{A \atop Bm}\right\} \chi^B, \tag{1}$$

wobei

$$\left\{{A \atop Bm}\right\} = -\tfrac{1}{4}\,\sigma^{j\dot{C}A}\,\sigma_{j\dot{C}B,m} + \tfrac{1}{4}\,\sigma^{j\dot{C}A}\,\sigma_{l\dot{C}B}\left\{{l \atop jm}\right\} + \frac{i}{2}\,\gamma_B{}^A\,\Phi_m \qquad \left(\Phi_m = -\frac{2e}{\hbar c}A_m\right) \tag{2}$$

gilt. Dabei haben wir im Unterschied zu unseren früheren Arbeiten zur weiteren Vereinfachung den metrischen Spinor konstant gesetzt.

Für eine spinorielle Feldtheorie 1. Ordnung besitzt die Lagrange-Funktion des Gesamtsystems inklusive Gravitation und anderer tensorieller Felder die Funktionalstruktur

$$\mathfrak{L} = \overset{G}{\mathfrak{L}} + \overset{U}{\mathfrak{L}} = -\frac{R\sqrt{g}}{2\varkappa} + \overset{U}{\mathfrak{L}}(U_\Omega, U_{\Omega,i}, g_{mn}, g_{mn,i}, \sigma_{m\dot{A}B}, \sigma_{m\dot{A}B,i}, x^i). \tag{3}$$

Durch das Auftreten der Größen $\sigma_{m\dot{A}B}$, die gemäß

$$g_{mn} = -\tfrac{1}{2}\,\sigma_m{}^{\dot{A}B}\,\sigma_{n\dot{A}B} \tag{4}$$

mit den g_{mn} verkoppelt sind, ist es im Falle spinorieller Felder in beliebigen Koordinaten nicht möglich, einfach die Formel für den Belinfante-Tensor

[1] E. Schmutzer, Z. Naturforschg. **15 a**, 355 [1960]; **17 a**, 685, 707 [1962].

[2] A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, Vieweg u. Sohn, Braunschweig 1953, Bd. 2.

[3] H. Boerner, Darstellungen von Gruppen, Springer-Verlag Berlin 1955.

[4] E. Schmutzer, Acta Phys. Hung. **17**, 57 [1964].

anzuwenden, denn der Beweis für die Identität von symmetrischem und BELINFANTEschem Energietensor verliert seine Gültigkeit, da seine Voraussetzungen nicht mehr stimmen. Von diesem Tatbestand überzeugt man sich auch sofort, denn gemäß dem BELINFANTE-Tensor führen Feldtheorien mit invarianten Feldfunktionen auf den Spin Null für diese Felder. Das ist auch der Grund dafür, weshalb die Auffassung der Spinoren als Invarianten Zweifel hervorruft, ob die logische Brücke zu den gesicherten Energie-Impuls- und Spinbeziehungen gewährleistet ist. Mit dieser grundlegenden Frage soll sich die vorliegende Arbeit befassen. Mit einer ähnlichen Problematik, allerdings auf einer anderen axiomatischen Grundlage, die den Rahmen der RIEMANNschen Geometrie verläßt („PALATINI-Prozedur"), beschäftigt sich eine kürzlich erschienene Arbeit von PERES [5].

§ 1. Hamilton-Prinzip und Noether-Theorem

Die σ_{mAB} werden als die elementaren metrischen Feldgrößen angesehen. Dementsprechend lautet das HAMILTON-Prinzip:

$$\delta W = \frac{1}{c}\,\delta \int\limits_{V_4} \mathfrak{L}\,\mathrm{d}^{(4)}x = 0 \quad (\delta\sigma_{m\dot{A}B}\big|_{(V_4)} = 0,\ \delta\sigma_{m\dot{A}B,i}\big|_{(V_4)} = 0).$$

Daraus resultieren als metrische Feldgleichungen die LAGRANGE-Gleichungen

$$\delta\mathfrak{L}/\delta\sigma_{m\dot{A}B} = 0. \tag{5}$$

Diese LAGRANGE-Gleichungen stellen im Endeffekt 16 reelle Feldgleichungen dar, deren Zusammenhang mit den 10 EINSTEINschen Feldgleichungen wir zu ermitteln haben. Zu diesem Zweck bilden wir die 16 reellen Gleichungen

$$\delta\mathfrak{L}/\delta\sigma_{m\dot{A}B}\,\sigma^{n}{}_{\dot{A}B} = 0 \tag{6}$$

durch Linearkombination der Gln. (5). Statt der letzten Gleichung können wir auch

$$\frac{\delta\overset{\mathrm{G}}{\mathfrak{L}}}{\delta\sigma_{m\dot{A}B}}\,\sigma^{n}{}_{\dot{A}B} = -\frac{\delta\overset{\mathrm{U}}{\mathfrak{L}}}{\delta\sigma_{m\dot{A}B}}\,\sigma^{n}{}_{\dot{A}B} \tag{7}$$

schreiben. Mittels der aus (4) folgenden Relationen

$$\frac{\partial g_{mn}}{\partial\sigma_{k\dot{E}F}} = -\tfrac{1}{2}(g^{k}_{m}\,\sigma_{n}{}^{\dot{E}F} + g^{k}_{n}\,\sigma_{m}{}^{\dot{E}F}), \tag{8}$$

$$\frac{\partial g_{mn,i}}{\partial\sigma_{k\dot{E}F}} = -\tfrac{1}{2}(g^{k}_{m}\,\sigma_{n}{}^{\dot{E}F}{}_{,i} + g^{k}_{n}\,\sigma_{m}{}^{\dot{E}F}{}_{,i}), \tag{9}$$

$$\frac{\partial g_{mn,i,j}}{\partial\sigma_{k\dot{E}F}} = -\tfrac{1}{2}(g^{k}_{m}\,\sigma_{n}{}^{\dot{E}F}{}_{,i,j} + g^{k}_{n}\,\sigma_{m}{}^{\dot{E}F}{}_{,i,j}), \tag{10}$$

$$\frac{\partial g_{mn,i}}{\partial\sigma_{k\dot{E}F,r}} = -\tfrac{1}{2}(g^{k}_{m}g^{r}_{i}\,\sigma_{n}{}^{\dot{E}F} + g^{k}_{n}g^{r}_{i}\,\sigma_{m}{}^{\dot{E}F}), \tag{11}$$

$$\frac{\partial g_{mn,i,j}}{\partial\sigma_{k\dot{E}F,r}} = -\tfrac{1}{2}g^{r}_{i}(g^{k}_{m}\sigma_{n}{}^{\dot{E}F}{}_{,j} + g^{k}_{n}\,\sigma_{m}{}^{\dot{E}F}{}_{,j}) - \tfrac{1}{2}g^{r}_{j}(g^{k}_{m}\,\sigma_{n}{}^{\dot{E}F}{}_{,i} + g^{k}_{n}\,\sigma_{m}{}^{\dot{E}F}{}_{,i}), \tag{12}$$

$$\frac{\partial g_{mn,i,j}}{\partial\sigma_{k\dot{E}F,r,s}} = -\tfrac{1}{4}g^{r}_{i}g^{s}_{j}(g^{k}_{m}\,\sigma_{n}{}^{\dot{E}F} + g^{k}_{n}\,g_{m}{}^{\dot{E}F}) - \tfrac{1}{4}g^{r}_{j}g^{s}_{i}(g^{k}_{m}\,\sigma_{n}{}^{\dot{E}F} + g^{k}_{n}\,\sigma_{m}{}^{\dot{E}F}) \tag{13}$$

ergeben sich für eine Funktion

$$F = F(g_{mn}, g_{mn,i}, g_{mn,i,j}, U_{\Omega}, U_{\Omega,i}, x^{i})$$

die einfachen Beziehungen

$$\frac{\delta F}{\delta\sigma_{k\dot{E}F}} = -\frac{\delta F}{\delta g_{kq}}\,\sigma_{q}{}^{\dot{E}F}, \tag{14}$$

$$\frac{\delta F}{\delta g_{kl}} = \frac{1}{2}\,\frac{\delta F}{\delta\sigma_{k\dot{E}F}}\,\sigma^{l}{}_{\dot{E}F}. \tag{15}$$

Wenden wir diese Ergebnisse auf $\overset{\mathrm{G}}{\mathfrak{L}}$ an, so resultiert

$$R^{kl} - \tfrac{1}{2}g^{kl}R = -\frac{\varkappa}{\sqrt{g}}\,\frac{\delta\overset{\mathrm{U}}{\mathfrak{L}}}{\delta\sigma_{k\dot{A}B}}\,\sigma^{l}{}_{\dot{A}B}\,.$$

Durch Vergleich mit der EINSTEINschen Feldgleichung lesen wir für den Energietensor

$$T^{kl} = -\frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\delta\overset{\mathrm{U}}{\mathfrak{L}}}{\delta\sigma_{k\dot{A}B}}\,\sigma^{l}{}_{\dot{A}B} \tag{16}$$

ab. Damit haben wir aus den 16 Feldgleichungen (5) die 10 EINSTEINschen Gleichungen abgeleitet. Die restlichen 6 Gleichungen sind die aus (16) folgenden Symmetriebedingungen

$$\frac{\delta\overset{\mathrm{U}}{\mathfrak{L}}}{\delta\sigma_{k\dot{A}B}}\,\sigma^{l}{}_{\dot{A}B} = \frac{\delta\overset{\mathrm{U}}{\mathfrak{L}}}{\delta\sigma_{l\dot{A}B}}\,\sigma^{k}{}_{\dot{A}B}\,. \tag{17}$$

Bei der Behandlung des NOETHER-Theorems knüpfen wir an eine frühere Arbeit [6] an, und zwar an die noch nicht spezifizierte dortige Gl. (27), für die wir allerdings, wenn wir statt von der Invarianz der LAGRANGE-Dichte (18) von der Invarianz des Wirkungsintegrals ausgehen, eine etwas modifizierte Form erhalten. Im einzelnen bekommen wir dann für nichtmetrische LAGRANGE-Funktionen 1. Ordnung ($\Delta_{\mathrm{R}} \equiv \delta$):

[5] A. PERES, Nuovo Cim., Suppl. **24**, 389 [1962].

[6] E. SCHMUTZER, Z. Naturforschg. **16 a**, 825 [1961].

$$\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta U_\Omega}\delta U_\Omega + \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\sigma_{m\dot{A}B}}\delta\sigma_{m\dot{A}B} + \left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial U_{\Omega,i}}\delta U_\Omega + \left\{\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\sigma_{m\dot{A}B,i}} - \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\sigma_{m\dot{A}B,i,j}}\right)_{,j}\right\}\delta\sigma_{m\dot{A}B} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\sigma_{m\dot{A}B,i,j}}\delta\sigma_{m\dot{A}B,j}\right]_{,i} = 0, \tag{18}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta U_\Omega}(\Delta_K U_\Omega - U_{\Omega;i}\xi^i) + \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\sigma_{m\dot{A}B}}\left(\Delta_K\sigma_{m\dot{A}B} - \sigma_{m\dot{A}B,i}\xi^i\right) + \left[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial U_{\Omega,i}}\Delta_K U_\Omega + \left\{\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\sigma_{m\dot{A}B,i}} - \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\sigma_{m\dot{A}B,i,j}}\right)_{,j}\right\}\Delta_K\sigma_{m\dot{A}B}\right.\\&+\xi^j\left(\mathfrak{L}g^i_j - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial U_{\Omega,i}}U_{\Omega,j} - \left\{\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\sigma_{m\dot{A}B,i}} - \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\sigma_{m\dot{A}B,i,j}}\right)_{,j}\right\}\sigma_{m\dot{A}B,j} - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\sigma_{m\dot{A}B,i,l}}\sigma_{m\dot{A}B,l,j}\right)\\&\left.+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\sigma_{m\dot{A}B,i,l}}\left(\Delta_K\sigma_{m\dot{A}B}\right)_{,l} - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\sigma_{m\dot{A}B,i,l}}\sigma_{m\dot{A}B,j}\xi^j{}_{,l}\right]_{,i} = 0.\end{aligned} \tag{19}$$

Hier soll uns nur die letzte Gleichung weiter interessieren. Entsprechend unserer Spinorkonzeption ist

$$\sigma_{m'\dot{A}'C'} = A^m_{m'}\sigma_{m\dot{A}B}, \quad \Delta_K\sigma_{m\dot{A}B} = -\sigma_{k\dot{A}B}\xi^k{}_{,m}. \tag{20}$$

An dieser Stelle empfiehlt es sich, die folgenden zweckmäßigen Abkürzungen einzuführen:

$$\mathfrak{V}^i_j = \mathfrak{L}g^i_j - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial U_{\Omega,i}}U_{\Omega,j} - \left\{\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\sigma_{m\dot{A}B,i}} - \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\sigma_{m\dot{A}B,i,j}}\right)_{,j}\right\}\sigma_{m\dot{A}B,j} - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\sigma_{m\dot{A}B,i,l}}\sigma_{m\dot{A}B,l,j} - \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta U_\Omega}S_\Omega{}^{\Gamma i}{}_j U_\gamma - \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\sigma_{i\dot{A}B}}\sigma_{j\dot{A}B}. \tag{21}$$

$$\mathfrak{V}_j{}^{im} = -\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial U_{\Omega,i}}S_\Omega{}^{\Gamma m}{}_j U_\Gamma - \left\{\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\sigma_{m\dot{A}B,i}} - \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\sigma_{m\dot{A}B,i,j}}\right)_{,j}\right\}\sigma_{j\dot{A}B} - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\sigma_{m\dot{A}B,i,l}}\sigma_{j\dot{A}B,l} - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\sigma_{l\dot{A}B,i,m}}\sigma_{l\dot{A}B,j}. \tag{22}$$

$$\mathfrak{V}_j{}^{iml} = -\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\sigma_{m\dot{A}B,i,l}}\sigma_{j\dot{A}B}. \tag{23}$$

Damit bekommen wir in Analogie zu früher

$$\left(\mathfrak{V}_j{}^i + \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta U_\Omega}S_\Omega{}^{\Gamma i}{}_j U_\gamma + \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\sigma_{i\dot{A}B}}\sigma_{j\dot{A}B}\right)_{,i} - \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta U_\Omega}U_{\Omega,j} - \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\sigma_{m\dot{A}B}}\sigma_{m\dot{A}B,j} = 0. \tag{24}$$

$$\mathfrak{V}_j{}^{im}{}_{,i} + \mathfrak{V}_j{}^m = 0. \tag{25}$$

$$\mathfrak{V}_j{}^{(lm)} + \mathfrak{V}_j{}^{i(ml)}{}_{,i} = 0. \tag{26}$$

$$\mathfrak{V}_j{}^{(iml)} = 0. \tag{27}$$

$$\mathfrak{V}_j{}^{iml}{}_{,i,m,l} = 0, \tag{28}$$

$$\mathfrak{V}_j{}^{lm}{}_{,l,m} = 0, \tag{29}$$

$$\mathfrak{V}_j{}^m{}_{,m} = 0, \tag{30}$$

$$\left(\frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta U_\Omega}S_\Omega{}^{\Gamma i}{}_j U_\gamma + \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\sigma_{i\dot{A}B}}\sigma_{j\dot{A}B}\right)_{,i} - \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta U_\Omega}U_{\Omega,j} - \frac{\delta\mathfrak{L}}{\delta\sigma_{i\dot{A}B}}\sigma_{i\dot{A}B,j} = 0. \tag{31}$$

Diese allgemein gültigen Formeln können wir nun einerseits spezialisieren auf $\overset{G}{\mathfrak{L}}$ und andererseits auf $\overset{U}{\mathfrak{L}}$. Aus der Identität

$$\begin{aligned}\mathrm{t}_j{}^i &= \left\{\frac{\partial\overset{G}{\mathfrak{L}}}{\partial\sigma_{m\dot{A}B,i}} - \left(\frac{\partial\overset{G}{\mathfrak{L}}}{\partial\sigma_{m\dot{A}B,i,n}}\right)_{,n}\right\}\sigma_{m\dot{A}B,j} + \frac{\partial\overset{G}{\mathfrak{L}}}{\partial\sigma_{m\dot{A}B,i,n}}\sigma_{m\dot{A}B,n,j} - \overset{G}{\mathfrak{L}}g_j{}^i\\&= \left\{\frac{\partial\overset{G}{\mathfrak{L}}}{\partial g_{pm,i}} - \left(\frac{\partial\overset{G}{\mathfrak{L}}}{\partial g_{pm,i,n}}\right)_{,n}\right\}g_{pm,j} + \frac{\partial\overset{G}{\mathfrak{L}}}{\partial g_{pm,i,l}}g_{pm,j,l} - \overset{G}{\mathfrak{L}}g_j{}^i\end{aligned} \tag{32}$$

erkennen wir, daß der Energiekomplex des Gravitationsfeldes mit dem von Lorentz und Mizkjewitsch angegebenen und von Møller eingehend untersuchten Energiekomplex identisch ist. Den kanonischen Energiekomplex des nichtmetrischen Feldes definieren wir durch

$${}^{(\mathrm{can})}\overset{U}{\mathfrak{T}}_j{}^i = \frac{\partial\overset{U}{\mathfrak{L}}}{\partial U_{\Omega,i}}U_{\Omega,j} + \frac{\partial\overset{U}{\mathfrak{L}}}{\partial\sigma_{m\dot{A}B,i}}\sigma_{m\dot{A}B,j} - \overset{U}{\mathfrak{L}}g_j{}^i. \tag{33}$$

Damit erhalten wir aus (16)

$$\mathfrak{T}_j{}^i = {}^{(\mathrm{can})}\overset{U}{\mathfrak{T}}_j{}^i + {}^{(U)}\mathfrak{V}_j{}^i = {}^{(\mathrm{can})}\overset{U}{\mathfrak{T}}_j{}^i + {}^{(U)}\mathfrak{V}_j{}^{im}{}_{,m}, \tag{34}$$

$$\text{wobei} \quad (\mathfrak{T}_j{}^i + \mathrm{t}_j{}^i)_{,i} = 0 \tag{35}$$

gilt. Ausgeschrieben bekommen wir die Formel

$$T^i_j = \frac{\partial\overset{U}{L}}{\partial U_{\Omega,i}}U_{\Omega,j} - \frac{1}{\sqrt{g}}(\mathcal{H}^{ims}g_{sj})_{,m} - \left(\frac{\partial\overset{U}{L}}{\partial\sigma_{m\dot{A}B,i}}\sigma_{j\dot{A}B}\right)_{,m} - \frac{\partial\overset{U}{L}}{\partial\sigma_{m\dot{A}B,i}}\sigma_{j\dot{A}B}\left\{{l \atop lm}\right\} + \frac{\partial\overset{U}{L}}{\partial\sigma_{m\dot{A}B,i}}\sigma_{m\dot{A}B,j} - \overset{U}{L}g_j{}^i. \tag{36}$$

Durch Differentiation und entsprechende Multiplikationen ergeben sich aus (2) die folgenden Formeln:

$$\frac{\partial \genfrac\{\}{0pt}{}{F}{Dk}}{\partial \sigma_{m\dot{A}B,i}} = \tfrac{1}{8} g_k{}^i \left(\sigma^{m\dot{A}}{}_D \gamma^{BF} - \sigma^{m\dot{A}F} \gamma_D{}^B\right) - \tfrac{1}{8} g_k{}^m \left(\sigma^{i\dot{A}}{}_D \gamma^{BF} - \sigma^{i\dot{A}F} \gamma_D{}^B\right) + \tfrac{1}{16} \sigma_k{}^{\dot{A}B} \left(\sigma^i{}_{\dot{C}D} \sigma^{m\dot{C}F} - \sigma^m{}_{\dot{C}D} \sigma^{i\dot{C}F}\right), \tag{37}$$

$$\sigma_{j\dot{A}B} \frac{\partial \genfrac\{\}{0pt}{}{F}{Dk}}{\partial \sigma_{m\dot{A}B,i}} = \tfrac{1}{8} g_k{}^m \left(\sigma_{j\dot{C}D} \sigma^{i\dot{C}F} - \sigma^i{}_{\dot{C}D} \sigma_j{}^{\dot{C}F}\right) - \tfrac{1}{8} g_k{}^i \left(\sigma_{j\dot{C}D} \sigma^{m\dot{C}F} - \sigma^m{}_{\dot{C}D} \sigma_j{}^{\dot{C}F}\right) - \tfrac{1}{8} g_{jk} \left(\sigma^i{}_{\dot{C}D} \sigma^{m\dot{C}F} - \sigma^m{}_{\dot{C}D} \sigma^{i\dot{C}F}\right), \tag{38}$$

$$\sigma^k{}_{\dot{C}F} \frac{\partial \genfrac\{\}{0pt}{}{F}{Dk}}{\partial \sigma_{m\dot{A}B,i}} = \tfrac{1}{8} \left(\sigma^{m\dot{A}}{}_D \sigma^i{}_{\dot{C}}{}^B - \sigma^{i\dot{A}}{}_D \sigma^m{}_{\dot{C}}{}^B\right) + \tfrac{1}{8} \gamma_D{}^B \left(\sigma^{i\dot{A}F} \sigma^m{}_{\dot{C}F} - \sigma^{m\dot{A}F} \sigma^i{}_{\dot{C}F}\right) + \tfrac{1}{8} \gamma_{\dot{C}}{}^{\dot{A}} \left(\sigma^m{}_{\dot{F}D} \sigma^{i\dot{F}B} - \sigma^i{}_{\dot{F}D} \sigma^{m\dot{F}B}\right), \tag{39}$$

$$\sigma_{j\dot{A}B} \sigma^k{}_{\dot{C}F} \frac{\partial \genfrac\{\}{0pt}{}{F}{Dk}}{\partial \sigma_{m\dot{A}B,i}} = \tfrac{1}{2} \left(g_j{}^i \sigma^m{}_{\dot{C}D} - g_j{}^m \sigma^i{}_{\dot{C}D}\right) \mp \tfrac{i}{4} \varepsilon_j{}^{im}{}_r \sigma^r{}_{\dot{C}D}, \tag{40}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{j\dot{A}B,l} \frac{\partial \genfrac\{\}{0pt}{}{F}{Dk}}{\partial \sigma_{j\dot{A}B,i}} = {} & \tfrac{1}{8} g_k{}^i \{ml, r\} \left(\sigma^m{}_{\dot{A}D} \sigma^{r\dot{A}F} - \sigma^r{}_{\dot{A}D} \sigma^{m\dot{A}F}\right) + \tfrac{1}{2} g_k{}^i \left(\genfrac\{\}{0pt}{}{F}{Dl} - \{Bl, D\} \gamma^{BF}\right) \\ & - \tfrac{1}{8} \sigma_{k\dot{A}B,l} \left(\sigma^{i\dot{A}}{}_D \gamma^{BF} - \sigma^{i\dot{A}F} \gamma_D{}^B\right) + \tfrac{1}{16} \sigma_{j\dot{A}B,l} \sigma_k{}^{\dot{A}B} \left(\sigma^i{}_{\dot{C}D} \sigma^{j\dot{C}F} - \sigma^j{}_{\dot{C}D} \sigma^{i\dot{C}F}\right). \end{aligned} \tag{41}$$

Schließlich beachten wir noch, daß als lokale Drehimpulsbilanzgleichung die Beziehung

$$\left[(\mathfrak{T}^{lj} + \mathfrak{t}^{lj}) x^i - (\mathfrak{T}^{ij} + \mathfrak{t}^{ij}) x^l + {}^{(\sigma)}\overline{\mathfrak{V}}{}^{ijl} - {}^{(\sigma)}\overline{\mathfrak{V}}{}^{lji}\right]_{,j} = (\mathfrak{T}_s{}^j + \mathfrak{t}_s{}^j) (x^i g^{ls}{}_{,j} - x^l g^{is}{}_{,j}) - {}^{(\sigma)}\overline{\mathfrak{V}}_s{}^{jl} g^{is}{}_{,j} - {}^{(\sigma)}\overline{\mathfrak{V}}_s{}^{ji} g^{ls}{}_{,j} \tag{42}$$

folgt, wobei

$$\begin{aligned} {}^{(\sigma)}\overline{\mathfrak{V}}_j{}^{im} & = - \left\{ \frac{\partial \overset{\mathrm{G}}{\mathfrak{L}}}{\partial \sigma_{m\dot{A}B,i}} - \left(\frac{\partial \overset{\mathrm{G}}{\mathfrak{L}}}{\partial \sigma_{m\dot{A}B,i,k}}\right)_{,k} \right\} \sigma_{j\dot{A}B} - \frac{\partial \overset{\mathrm{G}}{\mathfrak{L}}}{\partial \sigma_{m\dot{A}B,i,l}} \sigma_{j\dot{A}B,l} - \frac{\partial \overset{\mathrm{G}}{\mathfrak{L}}}{\partial \sigma_{l\dot{A}B,i,m}} \sigma_{l\dot{A}B,j} \\ & = - 2 \left\{ \frac{\partial \overset{\mathrm{G}}{\mathfrak{L}}}{\partial g_{mn,i}} - \left(\frac{\partial \overset{\mathrm{G}}{\mathfrak{L}}}{\partial g_{mn,i,k}}\right)_{,k} \right\} g_{jn} - 2 \frac{\partial \overset{\mathrm{G}}{\mathfrak{L}}}{\partial g_{mn,i,k}} g_{jn,k} - \frac{\partial \overset{\mathrm{G}}{\mathfrak{L}}}{\partial g_{kn,i,m}} g_{kn,j} \quad \text{ist.} \end{aligned} \tag{43}$$

§ 2. Anwendung auf ein aus gravitationellem, elektromagnetischem und spinoriellem Feld bestehendes System

Wir gehen von der nichtmetrischen LAGRANGE-Dichte

$$\overset{\mathrm{U}}{L} = \frac{A}{i} \left[\chi^{\dot{A}} \sigma^k{}_{\dot{A}B} \chi^B{}_{;k} - \chi^A \sigma^k{}_{A\dot{B}} \chi^{\dot{B}}{}_{;k} - \varphi_{\dot{A}} \sigma^{k\dot{A}B} \varphi_{B;k} + \varphi_A \sigma^{kA\dot{B}} \varphi_{\dot{B};k} + iN(\chi^A, \chi^{\dot{A}}, \varphi_A, \varphi_{\dot{A}}, \sigma_{m\dot{A}B})\right] - \tfrac{1}{4} B_{mn} B^{mn} \tag{44}$$

aus. Als LAGRANGE-Gleichungen resultieren die Feldgleichungen

$$B^{ji}{}_{;i} = \frac{2Ae}{\hbar c} \left(\varphi^{\dot{A}} \sigma^j{}_{\dot{A}B} \varphi^B - \chi^{\dot{A}} \sigma^j{}_{\dot{A}B} \chi^B\right) = \frac{1}{c} j^j, \qquad \sigma^k{}_{\dot{A}B} \chi^B{}_{;k} + \frac{i}{2} \frac{\partial N}{\partial \chi^{\dot{A}}} = 0, \quad \sigma^k{}_{\dot{A}}{}^B \varphi_{B;k} + \frac{i}{2} \frac{\partial N}{\partial \varphi^{\dot{A}}} = 0. \tag{45}$$

Spalten wir den elektromagnetischen Energietensor ab, so finden wir für den rein spinoriellen Energietensor

$$\begin{aligned} \overset{\mathrm{Sp}}{T}{}_j^i = {} & \frac{A}{i} \left[\chi^{\dot{B}} \sigma^i{}_{\dot{B}A} \chi^A{}_{,j} - \chi^B \sigma^i{}_{B\dot{A}} \chi^{\dot{A}}{}_{,j} + \varphi^B \sigma^i{}_{B\dot{A}} \varphi^{\dot{A}}{}_{,j} - \varphi^{\dot{B}} \sigma^i{}_{\dot{B}A} \varphi^A{}_{,j}\right] \\ & - \frac{\hbar}{2e} \Phi_j j^i - \left(\frac{\partial \overset{\mathrm{Sp}}{L}}{\partial \sigma_{m\dot{A}B,i}} \sigma_{j\dot{A}B}\right)_{,m} - \frac{\partial \overset{\mathrm{Sp}}{L}}{\partial \sigma_{m\dot{A}B,i}} \sigma_{j\dot{A}B} \genfrac\{\}{0pt}{}{l}{lm} + \frac{\partial \overset{\mathrm{Sp}}{L}}{\partial \sigma_{m\dot{A}B,i}} \sigma_{m\dot{A}B,j} - \overset{\mathrm{Sp}}{L} g_j{}^i. \end{aligned}$$

Die konkrete Ausrechnung dieser Größe ergibt bei Benutzung von (37) bis (41)

$$\overset{\mathrm{Sp}}{T}{}_{ji} = \frac{A}{i} \left[\chi^{\dot{B}} \sigma_{i\dot{B}A} \chi^A{}_{;j} - \chi^B \sigma_{iB\dot{A}} \chi^{\dot{A}}{}_{;j} + \varphi_B \sigma_i{}^{B\dot{A}} \varphi_{\dot{A};j} - \varphi_{\dot{B}} \sigma_i{}^{\dot{B}A} \varphi_{A;j}\right] \pm \frac{\hbar}{4e} \varepsilon_{ji}{}^{mr} \bar{j}_{r,m} - \overset{\mathrm{Sp}}{L} g_{ij}. \tag{46}$$

Durch Symmetrisierung entsteht die entscheidende Formel für den Energietensor:

$$\begin{aligned} \overset{\mathrm{Sp}}{T}{}_{ji} = {} & \frac{A}{2i} \left[\chi^{\dot{B}} \left(\sigma_{i\dot{B}A} \chi^A{}_{;j} + \sigma_{j\dot{B}A} \chi^A{}_{;i}\right) - \chi^B \left(\sigma_{iB\dot{A}} \chi^{\dot{A}}{}_{;j} + \sigma_{jB\dot{A}} \chi^{\dot{A}}{}_{;i}\right) \right. \\ & \left. + \varphi_B \left(\sigma_i{}^{B\dot{A}} \varphi_{\dot{A};j} + \sigma_j{}^{B\dot{A}} \varphi_{\dot{A};i}\right) - \varphi_{\dot{B}} \left(\sigma_i{}^{\dot{B}A} \varphi_{A;j} + \sigma_j{}^{\dot{B}A} \varphi_{A;i}\right)\right] - \overset{\mathrm{Sp}}{L} g_{ij}, \end{aligned} \tag{47}$$

während die Antisymmetrisierung auf die hier explizierte Bedingungsgleichung (7) führt:

$$\varepsilon_{ji}{}^{mr}\bar{j}_{r,m} = \mp \frac{2\,e\,A}{i\,\hbar}\,[\chi^{\dot B}(\sigma_{i\dot B A}\,\chi^{A}{}_{;j} - \sigma_{j\dot B A}\,\chi^{A}{}_{;i}) - \chi^{B}(\sigma_{iB\dot A}\,\chi^{\dot A}{}_{;j} - \sigma_{jB\dot A}\,\chi^{\dot A}{}_{;i})$$
$$+ \varphi_B\,(\sigma_i{}^{B\dot A}\,\varphi_{\dot A;j} - \sigma_j{}^{B\dot A}\,\varphi_{\dot A;i}) - \varphi_{\dot B}\,(\sigma_i{}^{\dot B A}\,\varphi_{A;j} - \sigma_j{}^{\dot B A}\,\varphi_{A;i})]\,. \tag{48}$$

Dabei ist

$$\bar{j}^k = -\left(\frac{2\,A\,e}{\hbar}\right)\sigma^k{}_{\dot A B}\,(\chi^{\dot A}\,\chi^B - \varphi^{\dot A}\,\varphi^B)\,, \tag{49}$$

die häufig als barionische Stromdichte bezeichnete Größe. Durch Umformung folgt statt (48)

$$\left(\frac{\partial N}{\sigma\chi^{\dot B}}\,\chi^{\dot C} - \frac{\partial N}{\partial\varphi_{\dot C}}\,\varphi_{\dot B}\right)(\sigma_i{}^{A\dot B}\,\sigma_{jA\dot C} - \sigma_j{}^{A\dot B}\,\sigma_{iA\dot C}) + \left(\frac{\partial N}{\partial\chi^{B}}\,\chi^{C} - \frac{\partial N}{\partial\varphi_{C}}\,\varphi_{B}\right)\cdot(\sigma_i{}^{\dot A B}\,\sigma_{j\dot A C} - \sigma_j{}^{\dot A B}\,\sigma_{i\dot A C}) = 0 \tag{50}$$

als Bedingungsgleichung an die nichtlineare Größe N. Auf diese Gleichung sind wir in unserer früheren Arbeit[6] [dort Gl. (134 a)] schon einmal gestoßen, wobei wir die Spinoren bei Koordinatentransformationen zu transformieren versucht haben[7].

Es ist interessant, daß die DIRAC-Theorie mit

$$N = \left(\frac{2\,m_0 c}{\hbar}\right)(\chi^B\,\varphi_B + \chi^{\dot B}\varphi_{\dot B}) \tag{51}$$

und die HEISENBERG-Theorie mit

$$N = \mp\,4\,l_0^2\,\chi^{\dot A}\,\varphi_{\dot A}\,\chi^B\,\varphi_B \tag{52}$$

diese obige Bedingungsgleichung befriedigen. — Für das Spinintegral resultiert aus (47)

$$s^{il} = \tfrac{1}{2}\,\hbar\,\varepsilon^{lir4}\int \bar{j}_r\,\mathrm{d}V = -\tfrac{1}{2}\,\hbar\,\varepsilon^{ilr4}\int \overline{\Psi}\gamma_r\gamma\,\Psi\,\mathrm{d}V. \tag{53}$$

Dieses ist also mit dem Strom (49) verknüpft, was dessen Deutung als barionischen Strom problematisch macht.

[7] Herrn Prof. P. G. BERGMANN und Herrn Dr. J. EHLERS danke ich für eine interessante Diskussion zu diesem Punkt.